## EXERCICE N°1 — 7 points — Principale 2015

Soit la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1°) a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$.

**b)** En déduire que la courbe $C_f$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

**c)** Etudier la position de $C_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

**2°) a)** Montrer que, pour tout réel $x$ de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

**b)** Montrer que $(x^2-1)$ et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1+\infty[$.

**c)** En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1+\infty[$.

**d)** Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

**e)** Dresser le tableau de variation de $f$.

**3°) a)** Montrer que la courbe $C_f$ admet une unique tangente $D$ parallèle à la droite Δ.

Préciser les coordonnées du point $B$, point de contact de $C$ et $D$.

**b)** Donner une équation de D.

**4°)** Dans la figure ci-contre, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

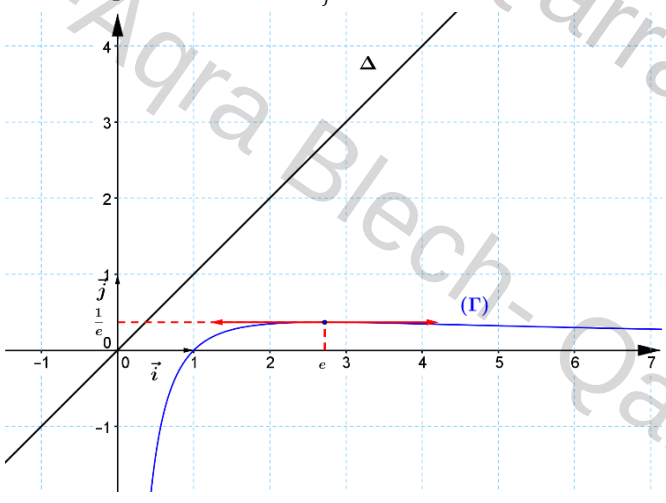
**a)** Soit le point $A(\dfrac{1}{e},0)$.

Placer le point $A$ et vérifier que $A$ appartient à D.

**b)** Tracer la droite D et placer le point B.

**c)** Tracer $C_f$.

**5°)** Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$, la droite Δ et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et x=e. Calculer $\mathcal{A}$.




Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn



Tous droits réservés © TakiAcademy.com